1. La scomposizione in fattori dei polinomi

Scomporre in fattori un polinomio significa scriverlo sotto forma di prodotto di polinomi di grado inferiore.

ESEMPIO

$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$.

$(x^2 - 1)$ può essere scomposto ulteriormente in $(x + 1)(x - 1)$. Quindi:

$x^4 - 1 = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$.

Invece, $x^2 + 1$ non è scomponibile. Puoi verificarlo applicando il teorema di Ruffini.

DEFINIZIONE

Polinomio riducibile, polinomio irriducibile

Un polinomio in una o più variabili è riducibile quando può essere scomposto nel prodotto di polinomi, tutti di grado minore.

Un polinomio non riducibile si chiama irriducibile.

▶ La scomposizione in fattori viene anche chiamata *fattorizzazione*.

▶ Se leggi da destra verso sinistra, ritrovi un prodotto notevole.

▶ Si dice che il polinomio $x^4 - 1$, scomponibile in fattori, è *riducibile*, mentre $(x + 1)$, $(x - 1)$, $(x^2 + 1)$ sono *irriducibili*.

ESEMPIO

Il polinomio $x^2 - 2x + 1$ è riducibile. Infatti:

$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2$.

Sono irriducibili i polinomi: $x^2 + 25$, $x + 4$, $2x^2 + 5$.

▶ Possiamo fare un'analogia fra i polinomi irriducibili e i numeri primi. Come la scomposizione di un numero naturale in fattori primi è unica (a meno dell'ordine), così anche la scomposizione di un polinomio in polinomi irriducibili è unica (a meno dell'ordine).

I metodi per la scomposizione dei polinomi

Purtroppo non esiste un metodo generale per ottenere la scomposizione di un polinomio riducibile. Studiamo allora alcuni dei metodi più comuni di fattorizzazione, basati su regole algebriche che conosciamo. I metodi sono:

- raccogliere a fattore comune;
- raccogliere parzialmente;
- individuare prodotti notevoli;
- riconoscere particolari trinomi di secondo grado;
- utilizzare la regola di Ruffini.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V13a

Il raccoglimento a fattore comune

Se in tutti i termini di un polinomio è contenuto uno stesso fattore, che può anche essere un numero, allora è possibile mettere in evidenza tale fattore con un raccoglimento a fattore comune.

ESEMPIO

$ab + ac + ad = a(b + c + d)$;

$5x^4 - 10x^3 - 35x^2 = 5x^2(x^2 - 2x - 7)$;

$3(a + b) + x(a + b) = (a + b)(3 + x)$.

▶ Il raccoglimento a fattore comune si basa sulla proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

Il raccoglimento parziale

Consideriamo il seguente polinomio P:

$$P = ac + bc + ad + bd + ae + be.$$

I primi due termini hanno in comune il fattore c, il terzo e il quarto il fattore d, il quinto e il sesto il fattore e.
Raccogliamo i fattori comuni:

$$P = c(a + b) + d(a + b) + e(a + b).$$

Il polinomio è ora formato da una somma di tre termini, che hanno in comune il fattore $(a + b)$. Raccogliamo $(a + b)$:

$$P = (a + b)(c + d + e).$$

Siamo giunti al prodotto di due fattori. Questo metodo di scomposizione viene detto **raccoglimento parziale**.

ESEMPIO

$$\underline{5ab} - \underline{10b^2} + \underline{3a^2b} - \underline{6ab^2} = \underline{5b}(a - 2b) + \underline{3ab}(a - 2b) =$$
$$= (a - 2b)(5b + 3ab).$$

Il metodo che applichiamo percorre in verso contrario i passaggi che utilizziamo nella moltiplicazione di due polinomi.

Il raccoglimento parziale è una scomposizione in fattori che avviene sempre in due fasi.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V13b

La scomposizione riconducibile a prodotti notevoli

Riscriviamo le uguaglianze che esprimono le regole dei prodotti notevoli già incontrati, ma scambiamo il primo con il secondo membro:

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B);$$
$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2;$$
$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2;$$
$$A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC = (A + B + C)^2;$$
$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3;$$
$$A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3.$$

Analogamente, per la differenza o la somma di due cubi abbiamo:

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2);$$
$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2).$$

Questo modo di scrivere le uguaglianze fornisce delle regole di scomposizione in fattori. Infatti, nel primo membro di ogni uguaglianza troviamo la somma algebrica di più termini, nel secondo membro un prodotto di più fattori.

ESEMPIO Il polinomio $9x^2 - y^4$ è formato da due termini.
Poiché $9x^2 = (3x)^2$ e $y^4 = (y^2)^2$, il polinomio può essere visto come differenza di quadrati: $9x^2 - y^4 = (3x)^2 - (y^2)^2$.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezioni ▶ V14a
▶ V14b
▶ V15a
▶ V15b

▶ Si ha anche
$9x^2 = (-3x)^2$
e $y^4 = (-y^2)^2$,
perciò un'altra soluzione equivalente è:
$9x^2 - y^4 =$
$= (-3x + y^2)(-3x - y^2)$.

Essendo $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, possiamo scrivere:

$$9x^2 - y^4 = (3x - y^2)(3x + y^2).$$

La scomposizione di particolari trinomi di secondo grado

Consideriamo il trinomio di secondo grado:

$$x^2 + 8x + 15.$$

Esso è particolare per due motivi:

- il coefficiente di x^2 è 1;
- i numeri 8 e 15 sono, rispettivamente, la somma e il prodotto di 3 e 5:

$$8 = 3 + 5 \quad \text{e} \quad 15 = 3 \cdot 5.$$

Ebbene, se proviamo a moltiplicare i due binomi $(x + 3)$ e $(x + 5)$, otteniamo proprio il trinomio $x^2 + 8x + 15$.
In generale, un trinomio di secondo grado del tipo $x^2 + sx + p$ è scomponibile nel prodotto $(x + a)(x + b)$ se $s = a + b$ e $p = ab$.
In altri termini:

▶ s è l'iniziale di «somma», p di «prodotto».

$$\boldsymbol{x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b).}$$

Dimostriamo questa uguaglianza mediante i seguenti passaggi:

$$x^2 + sx + p = x^2 + (a + b)x + ab = x^2 + ax + bx + ab =$$

Operiamo un raccoglimento parziale:

$$= x(x + a) + b(x + a) = (x + a)(x + b).$$

ESEMPIO

$$x^2 \underbrace{+\,7}_{s = 4 + 3} x \underbrace{+\,12}_{p = 4 \cdot 3} x = (x + 4)(x + 3).$$

$$y^2 \underbrace{-\,3}_{s = -5 + 2} y \underbrace{-\,10}_{p = (-5)(+2)} = (y - 5)(y + 2).$$

La scomposizione mediante il teorema e la regola di Ruffini

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V16a

Il teorema di Ruffini permette spesso di scomporre in fattori un polinomio. Sappiamo infatti che se un polinomio $A(x)$ assume il valore 0 quando alla variabile x si sostituisce un valore a, allora il polinomio è divisibile per $x - a$.
Eseguendo la divisione $A(x) : (x - a)$, otteniamo il polinomio quozient $Q(x)$ e, poiché il resto è zero, scriviamo $A(x)$ come prodotto di due fattori:

$$A(x) = (x - a)\,Q(x).$$

ESEMPIO

$2x^3 - 5x^2 + 5x - 6$

assume il valore 0 per $x = 2$, quindi è divisibile per $x - 2$.
Calcoliamo il quoziente applicando la regola di Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -5 & 5 & -6 \\ 2 & & 4 & -2 & 6 \\ \hline & 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}$$

$Q(x) = 2x^2 - x + 3.$
$(2x^3 - 5x^2 + 5x - 6) : (x - 2) = 2x^2 - x + 3,$

quindi: $2x^3 - 5x^2 + 5x - 6 = (x - 2)(2x^2 - x + 3)$.

Il polinomio iniziale è stato scomposto nel prodotto di due fattori.

▸ 2 è uno zero del polinomio iniziale.

Dunque, se troviamo uno **zero *a* di un polinomio** $A(x)$, cioè un valore a tale che $A(a) = 0$, sappiamo anche scomporre il polinomio di partenza nel prodotto di due fattori.
Ma come trovare gli zeri di un polinomio? Per farlo può essere utile considerare la seguente regola.

REGOLA

Zeri interi di un polinomio

Se un numero intero annulla un polinomio a coefficienti interi, allora esso è divisore del termine noto.

Dalla regola possiamo dedurre un metodo per la ricerca degli zeri interi di un polinomio: se esistono, essi sono fra i divisori del termine noto.

ESEMPIO Dato il polinomio:

$A(x) = 5x^2 - x - 4,$

i divisori di -4 sono: $1, 2, 4, -1, -2, -4$.

Sostituendo a x il valore 1, otteniamo:

$A(1) = 5 - 1 - 4 = 0,$

quindi 1 è uno zero di $A(x)$, perciò il polinomio è divisibile per $x - 1$.

Calcoliamo il quoziente applicando la regola di Ruffini.

$$\begin{array}{c|cc|c} & 5 & -1 & -4 \\ 1 & & 5 & 4 \\ \hline & 5 & 4 & 0 \end{array}$$

$Q(x) = 5x + 4.$

Pertanto $5x^2 - x - 4 = (x - 1)(5x + 4)$.

▸ Non è vero che *tutti* i divisori del termine noto sono zeri del polinomio. Per esempio:

$A(2) = 5 \cdot 4 - 2 - 4 =$
$= 20 - 6 = 14 \neq 0.$