1. Le equazioni

Che cos'è un'equazione

Consideriamo l'uguaglianza $2 + 3x = 5x$.
Si può dimostrare che esiste un solo valore che, sostituito a x, la rende vera. Questo valore è il numero 1: infatti $2 + 3 \cdot 1 = 5 \cdot 1$.
In generale, data un'uguaglianza fra due espressioni in cui compaiono delle variabili, ci si può chiedere per quali valori delle variabili essa è vera.

DEFINIZIONE

Equazione

Un'equazione è un'uguaglianza dove compaiono espressioni letterali per le quali si cercano i valori da attribuire a una o più lettere che rendono vera l'uguaglianza.

$$2 \cdot x + 1 = 3 \cdot x - 2$$

$$2 \cdot 3 + 1 = 3 \cdot 3 - 2$$

VERA per $x = 3$

▶ **Equazione** deriva da *aequare*, che in latino significa «rendere uguale».

L'espressione a sinistra del segno di uguaglianza è il **primo membro** dell'equazione, l'espressione a destra è il **secondo membro**.
Le lettere per le quali si cercano i valori che rendono vera l'uguaglianza, sono dette **incognite** dell'equazione.

▶ incognita

$$\underbrace{2x + 1}_{\text{primo membro}} = \underbrace{3x - 2}_{\text{secondo membro}}$$

▶ In questo capitolo ci occuperemo di equazioni con una sola incognita.

ESEMPIO $2 - 3y = 5$ è un'equazione nell'incognita y;
$x + 3y = 7$ è un'equazione in due incognite, x e y.

Le soluzioni di un'equazione

I valori che rendono vera l'uguaglianza si chiamano **soluzioni** o **radici** dell'equazione. Si può anche dire che tali valori «verificano» (o anche «soddisfano») l'equazione.

ESEMPIO L'equazione $y - 9 = 1$ ha per soluzione 10, perché $10 - 9 = 1$.

Diciamo che la soluzione è $y = 10$.

Risolvere un'equazione significa determinare **tutte** le sue soluzioni, cioè tutti i valori che verificano l'uguaglianza. Tali valori costituiscono l'**insieme delle soluzioni** dell'equazione.

▶ A volte indicheremo con S l'insieme delle soluzioni. Nell'esempio,

$S = \{2, -2\}$.

ESEMPIO L'equazione $x^2 = 4$ ha due soluzioni: $x = 2$ e $x = -2$.

Infatti, $(2)^2 = 4$ e $(-2)^2 = 4$.

Considerando le **soluzioni**, un'equazione è:

- **determinata** se ha un numero finito di soluzioni; per esempio: $x + 5 = 8$;
- **indeterminata** se ha infinite soluzioni; per esempio: $x + x = 2x$;
- **impossibile** se non ha soluzioni; per esempio: $x + 1 = x$.

Il **grado** dell'equazione è il grado del polinomio ridotto, ossia il massimo esponente con cui l'incognita compare nell'equazione in forma normale: l'equazione sopra considerata è di secondo grado.

In questo capitolo ci occuperemo soltanto della risoluzione di equazioni di primo grado. Esse vengono anche dette **equazioni lineari**.

ESEMPIO
$3x - 6 = 0$ è un'equazione di primo grado.

Per risolvere un'equazione cercheremo di trasformarla in equazioni equivalenti, via via più semplici, fino a giungere a un'equazione in cui sia immediato trovare l'insieme delle soluzioni.
Le regole di trasformazione di un'equazione in altre equazioni a essa equivalenti sono stabilite da due princìpi, chiamati **princìpi di equivalenza**.

Il primo principio di equivalenza

PRINCIPIO

Primo principio di equivalenza

Data un'equazione, se si aggiunge ai due membri uno stesso numero o una stessa espressione, si ottiene un'equazione equivalente.

I membro = II membro

equivalente a

I membro + ● = II membro + ●

ESEMPIO Consideriamo l'equazione $2x = 6$ che ha come soluzione $x = 3$.

Aggiungiamo a entrambi i membri 5 e otteniamo $2x \underline{+5} = 6 \underline{+5}$, ossia $2x + 5 = 11$. La soluzione di questa equazione è $x = 3$, quindi è equivalente a quella data.

Si può rendere più rapido il procedimento notando che, quando si elimina da un membro un termine, grazie al primo principio di equivalenza, esso ricompare nell'altro con il segno cambiato. Si può quindi formulare la **regola del trasporto**:

data un'equazione, se ne ottiene una equivalente se si trasporta un termine da un membro all'altro, cambiandolo di segno.

ESEMPIO $x + 2 = 5 \quad \rightarrow \quad x = 5 - 2 \quad \rightarrow \quad x = 3.$

Il secondo principio di equivalenza

PRINCIPIO

Secondo principio di equivalenza

Data un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente se si moltiplicano o si dividono i due membri per uno stesso numero, o espressione, *diverso da* 0.

I membro = II membro

equivalente a

● · I membro = ● · II membro

ESEMPIO L'equazione $\frac{2}{3}x = 10$ ha soluzione $x = 15$, infatti $\frac{2}{3} \cdot 15 = 10$.

Moltiplichiamo i due membri per 3 e otteniamo l'equazione:

$$3 \cdot \frac{2}{3}x = 3 \cdot 10, \qquad \text{ossia} \qquad 2x = 30.$$

La soluzione di questa equazione è 15, quindi è equivalente a quella data.

Le applicazioni del secondo principio

Applicando il secondo principio, è possibile ricavare due regole utili per risolvere equazioni.

REGOLA

La divisione per un fattore comune diverso da 0

Se tutti i termini di un'equazione hanno un fattore numerico comune (*diverso da* 0), si ottiene un'equazione equivalente dividendo tutti i termini per quel fattore.

$3x + 3 \cdot 5 = 3 \cdot 7$

equivalente a

$\cancel{3}x + \cancel{3} \cdot 5 = \cancel{3} \cdot 7$

ESEMPIO Nell'equazione $3x + 9 = 24 - 3$ i termini $3x$, 9, 24 e 3 sono tutti divisibili per 3; pertanto possiamo dividere ciascun termine per 3, ottenendo l'equazione $x + 3 = 8 - 1$, equivalente alla data.

Altro esempio: nell'equazione

$2x + 4 = 0$

possiamo dividere per 2 e otteniamo

$x + 2 = 0$,

perché $0 : 2 = 0$.

Vale la **regola del cambiamento di segno**:

cambiando segno a tutti i termini di un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente.

ESEMPIO $-5x + 8 = -23 \rightarrow 5x - 8 = 23; \quad -x = 5 \rightarrow x = -5.$

Cambiare il segno a tutti i termini dell'equazione equivale a *moltiplicare i due membri dell'equazione per* -1!

Osservazione. Il secondo principio è particolarmente utile per eliminare, passando a un'equazione equivalente, i denominatori nei coefficienti di un'equazione.